ENERGIA MECCANICA

di

Maurizio Schiaulini

Indice generale

1. Lavoro....3
1.1 Definizione con forza costante....3
1.2 Lavoro totale....5
1.3 Prodotto di vettori unidirezionali....5
1.4 Generalizzazione....6
1.5 Prodotto scalare....7
2. Energia Cinetica....9
Teorema dell'energia cinetica....9
3. Lavoro della forza elastica....11
3.1 Lavoro di una forza variabile, con spostamento rettilineo....11
3.2 Lavoro della forza elastica....11
4. Forze conservative, Energia Potenziale ed Energia Meccanica....14
4.1 Energia potenziale gravitazionale....14
I Fatti....14
Costruzione di un quadro teorico entro cui sistemare i fatti sopra descritti....15
Forze conservative....16
4.2 Calcolo dell'energia potenziale gravitazionale....18
Arbitrarietà del piano di riferimento....19
4.3 Proprietà fondamentale delle forze conservative....21
4.4 Definizione generale dell'Energia Potenziale....22
4.5 Energia potenziale elastica....24
4.6 Teorema della conservazione dell'Energia Meccanica....24
5. Forze non conservative....27
5.1 Energia meccanica e lavoro....27
5.2 Sistema di corpi – Energia interna....28
Conservazione dell'energia totale....31
Sistemi macroscopici....31
Versioni....34

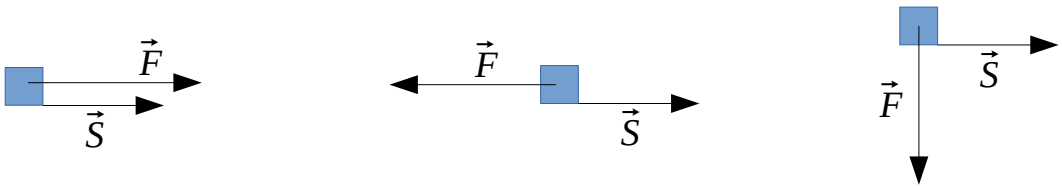
1. Lavoro

1.1 Definizione con forza costante

In questo capitolo verrà introdotta una nuova grandezza fisica scalare: *Il Lavoro*. Tale grandezza si rivelerà di grande importanza per l'interpretazione dei fenomeni dinamici e per l'introduzione di un'altra grandezza altrettanto importante: "L'energia".

Daremo la definizione nel caso particolare di forze costanti e per traiettorie rettilinee. Inoltre fino al capitolo 5, quando si parlerà di corpi si farà riferimento o a punti materiali, o a corpi rigidi ideali.

Se un corpo su cui è applicata una o più forze costanti[(1)], si muove lungo una traiettoria rettilinea, allora definiamo il *Lavoro* di ognuna delle forze applicate, secondo i seguenti 3 casi (in quanto segue $\vec{F}$ rappresenta una delle forze applicate al corpo).



Caso I *Caso II* *Caso III*

Caso I. *Il vettore Forza ha stessa direzione e stesso verso del vettore spostamento*:

$$L = F\,S\,;$$

F e S senza il segno di vettore rappresentano i moduli dei rispettivi vettori (in quanto segue si faccia sempre ben attenzione alla presenza o all'assenza del segno di vettore).

Ricordiamo che il modulo di un vettore è sempre positivo, pertanto in questo primo caso il lavoro sarà espresso sempre da un valore positivo.

Caso II. *Il vettore Forza ha stessa direzione ma verso contrario del vettore spostamento*:

$$L = -\,F\,S\,.$$

(1) Con forza costante si intende una forza che non cambia mai modulo direzione e verso, durante un determinato tragitto effettuato dal corpo.

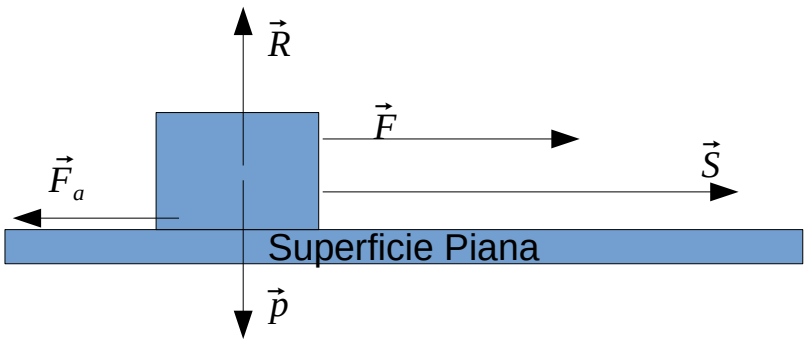
In questo caso il lavoro sarà sempre negativo, visto che F e S sono positivi.

Oss. Se a qualcuno pare strano che un corpo si sposti nel verso contrario a quello in cui agisce la forza, ricordiamo che sul corpo possono agire anche altre forze oltre a quella di cui stiamo calcolando il lavoro. È possibile comunque trovare esempi di questo tipo anche con una sola forza agente(2): si pensi per esempio ad un corpo lanciato in alto, lungo la verticale; mentre il corpo si sposta verso l'alto, l'unica forza che agisce è il peso che punta verso il basso. Un altro esempio è dato da un corpo lanciato su un piano, in questo caso l'unica forza agente è quella di attrito(3) che si oppone al moto e quindi è contraria allo spostamento.

Caso III. *Il vettore forza ha direzione perpendicolare al vettore spostamento*:

$$L = 0 \, .$$

Nell'**esempio** che segue sono racchiusi i tre casi definiti sopra.



Un corpo appoggiato su una superficie piana, è sottoposto ad una forza $\vec{F}$ che lo fa muovere verso destra di un tratto definito dal vettore spostamento $\vec{S}$. Il corpo inoltre è sottoposto al peso e alla reazione vincolare $\vec{R}$ del piano. Durante lo spostamento agisce anche la forza di attrito $\vec{F}_a$.

Lavoro della forza $\vec{F}$. Siamo nel ***Caso I***, pertanto $L_F = F\,S$.

Lavoro della forza $\vec{F}_a$. Siamo nel ***Caso II***, pertanto $L_{F_a} = -\,F_a S$.

Lavoro delle forze $\vec{R}$ **e** $\vec{P}$. Per entrambe siamo nel ***Caso III***, pertanto $L_R = 0$ e $L_P = 0$.

(2) Direzione e verso dello spostamento coincidono con quelli della velocità, solo se il corpo è inizialmente fermo o ha una velocità iniziale con stessa direzione e verso della forza (la forza risultante ha sempre la direzione e il verso dell'accelerazione, non della velocità).

(3) La forza peso è controbilanciata dalla reazione vincolare del piano.

1.2 Lavoro totale

Se su un corpo agiscono più forze, *si definisce lavoro totale delle forze agenti, la somma dei lavori delle singole forze*.

Nell'esempio appena visto, abbiamo:

$$L_T = L_F + L_{F_a} + L_R + L_P = F\,S - F_a S + 0 + 0 = (F - F_a)\,S\,.$$

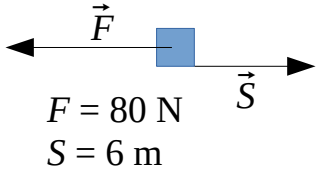
OSS. Si osservi che $F - F_a$ è il modulo della risultante delle 4 forze che agiscono sul corpo; inoltre tale risultante è equiversa a $\vec{S}$ (la forza di attrito è minore – o al limite uguale – della forza che sta spostando il corpo) e quindi siamo nel Caso I.

Il risultato trovato con l'osservazione precedente, non si limita solo all'esempio preso in considerazione, ma è del tutto generale; possiamo quindi affermare che ***il lavoro totale è pari al lavoro della forza risultante (somma vettoriale), di tutte le forze che agiscono sul corpo***[4] (non sarà riduttivo quindi, se nel seguito ci limiteremo ad una sola forza, per le nostre considerazioni).

1.3 Prodotto di vettori unidirezionali

Questo paragrafo non è necessario per la lettura dell'articolo.

Nel caso in cui tutti i vettori coinvolti abbiano la stessa direzione, è possibile usare i numeri reali per rappresentare i vettori. Per far ciò bisogna stabilire un verso convenzionale; tutti i vettori con tale verso saranno rappresentati da numeri positivi, mentre quelli con verso contrario saranno rappresentati da numeri negativi.



Se prendiamo come verso convenzionale quello che punta a destra i vettori di figura si scriveranno: $\vec{F} = -80\,\text{N}$ e $\vec{S} = 6\,\text{m}$.

Se prendiamo invece come verso convenzionale quello che punta a sinistra avremo: $\vec{F} = 80\,\text{N}$ e $\vec{S} = -6\,\text{m}$ [5].

Facciamo notare che dire di un vettore che possa essere positivo o negativo, è privo di senso; i vettori non sono numeri. Come abbiamo appena visto, uno stesso vettore può essere rappresentato

(4) Visto che stiamo considerando punti materiali o corpi rigidi ideali, possiamo evitare di considerare il contributo al lavoro totale, dovuto alle forze interne (vedi capitolo 5).

(5) Chi ha familiarità con le componenti dei vettori avrà capito che stiamo considerando un caso particolare in cui il riferimento è unidimensionale.

da un numero positivo o da un numero negativo; dipende dalla convenzione usata[6].

In molti testi si considera il vettore forza, negativo se il suo verso è opposto al vettore $\vec{S}$, senza tuttavia aver preventivamente indicata la convenzione usata. In assenza di indicazioni, si sottintende il verso convenzionale coincidente con quello di $\vec{S}$. Bisogna però stare attenti con questa pratica, infatti ci sono fenomeni in cui il verso di $\vec{S}$ cambia. Si pensi per esempio ad un corpo lanciato in aria; il vettore $\vec{S}$ cambia verso nella fase di discesa. In un caso come questo va fissato una volta per tutte un verso positivo (verso l'alto o verso il basso) a prescindere da quello di $\vec{S}$.

Consideriamo ora il prodotto

$$\vec{F}\,\vec{S};$$

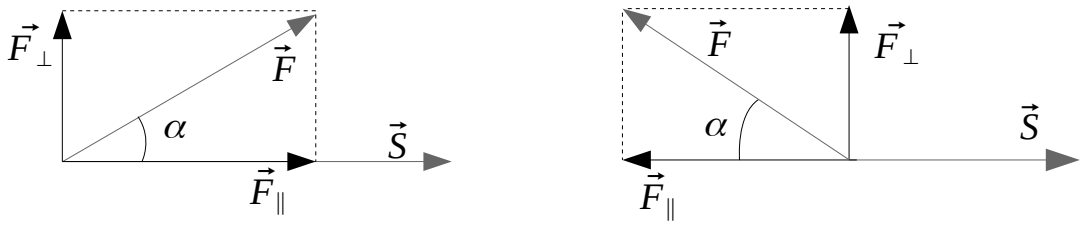
osserviamo che il valore numerico che ne risulta, non dipende dalla convenzione scelta (è possibile quindi che il prodotto di due vettori, possa avere un significato fisico). Se i due vettori hanno lo stesso verso il prodotto è positivo (prodotto di due numeri con stesso segno), mentre se i due vettori hanno verso contrario il prodotto è negativo. Nel nostro esempio, se scegliamo come verso positivo quello che punta a destra, otteniamo: $\vec{F}\,\vec{S} = -80 \cdot 6\,\mathrm{N\,m} = -480\,\mathrm{N\,m}$. È evidente che se si sceglie l'altra convenzione si ottiene lo stesso risultato.

Come si vede, utilizzando il prodotto di vettori, si può definire il lavoro, riunendo i casi I e II in una sola espressione. Scriveremo:

$$L = \vec{F}\,\vec{S}.$$

1.4 Generalizzazione

Quesito: Come faccio a calcolare il lavoro di $\vec{F}$, se la traiettoria rettilinea lungo la quale si sposta il corpo non è né perpendicolare né parallela alla direzione della forza?



(6) In molti testi scolastici si legge che un'accelerazione negativa comporta una diminuzione di velocità, dando così un significato fisico al segno che certo, vista la sua natura convenzionale, non può assolutamente avere. Si possono infatti fare esempi di corpi con accelerazione negativa che aumentano la loro velocità, a riprova di quanto detto (per un approfondimento sui vettori unidirezionali vedi: https://schiaulini.blogspot.com/2014/10/vettori-unidirezionali.html).

$$L = F_{\parallel} S = F S \cos\alpha \qquad\qquad L = - F_{\parallel} S = - F S \cos\alpha$$

Risposta. È sempre possibile ridursi ad uno dei *tre casi* (non sarà riduttivo quindi, se nel seguito ci limiteremo unicamente ad essi per le nostre considerazioni). Basta scomporre $\vec{F}$ nelle due direzioni: parallela e perpendicolare al vettore spostamento e calcolare il lavoro totale delle due forze $\left(\vec{F}_{\parallel}\ ,\ \vec{F}_{\perp}\right)$ così ottenute. Ma il lavoro di $\vec{F}_{\perp}$ rientra nel III Caso e quindi è nullo, pertanto in definitiva avremo:

$$L = \pm F_{\parallel} S\ . \tag{1}$$

Nel caso in cui $\vec{F}_{\parallel}$ sia equiverso al vettore $\vec{S}$, siamo nel Caso I e quindi si sceglierà il segno "+"; nel caso in cui $\vec{F}_{\parallel}$ sia antiparallelo al vettore $\vec{S}$, siamo nel Caso II e quindi si sceglierà il segno "–" (vedi figure)[7].

Nella (1) è contenuto anche il III Caso; infatti se $\vec{F}$ e $\vec{S}$ sono perpendicolari, la componente di $\vec{F}$ lungo la direzione di $\vec{S}$ è nulla $\left(\vec{F}_{\parallel} = 0\right)$.

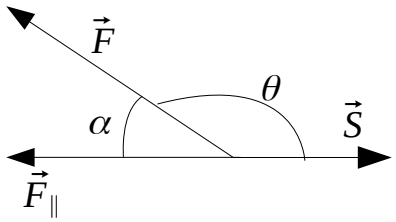
Se indichiamo con α, l'angolo più piccolo tra le direzioni di $\vec{F}$ e $\vec{S}$, si ha: $F_{\parallel} = F\cos\alpha$ (vedi figure soprastanti), pertanto abbiamo:

$$L = \pm F S \cos\alpha\ ;$$

si noti che se $\alpha = 90°$, allora $L = 0$.

1.5 Prodotto scalare

Questo paragrafo non è necessario per la lettura dell'articolo.



Indicando con θ l'angolo tra i vettori $\vec{F}$ e $\vec{S}$, si avranno i seguenti due casi:

- se $\theta \leq 90°$, si ha $\cos\theta = \cos\alpha$; (θ e α coincidono), il lavoro è positivo;
- se $\theta > 90°$, $\cos\theta = -\cos\alpha$; ($\theta = 180° - \alpha$), il lavoro è negativo.

Con questa premessa possiamo quindi scrivere il lavoro tramite la relazione:

(7) Ribadiamo (anche se la questione dovrebbe ormai essere chiara) che $F_{\parallel}$ è un numero positivo (modulo di un vettore).

$L = F\,S\cos\theta$. Tale relazione ha il vantaggio di essere valida per tutti i casi e non c'è quindi bisogno di inserire "*a mano*" il segno giusto.

L'espressione $F\,S\cos\theta$ si indica con la scrittura: $\vec{F}\cdot\vec{S}$ (si legge "*F scalar S*") e viene chiamata: "***Prodotto scalare di due vettori***"(8). Alla fine della storia, possiamo quindi scrivere:

$$L = \vec{F}\cdot\vec{S}\,.$$

Si noti che per e $\theta = 0°$ e $\theta = 180°$ si ottiene come caso particolare, il prodotto tra vettori unidirezionali definito nel paragrafo 1.3.

(8) Si noti che il risultato del prodotto scalare tra vettori, non è un vettore, ma uno scalare

2. Energia Cinetica

Teorema dell'energia cinetica

Consideriamo un corpo che si muova da un punto *A* ad un punto *B*, allora il lavoro totale delle forze che agiscono sul corpo, espresso in termini di velocità del corpo è dato da:

$$L_T = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}. \qquad (2)$$

Questa espressione è del tutto generale. È possibile infatti mostrare che essa non è soggetta alle limitazioni che ci siamo imposti in questo articolo; in altre parole essa è valida per forze che variano in modulo e direzione, durante un tragitto che può anche essere curvilineo[9].

La relazione (2) ci spinge a definire una nuova grandezza: $E_C = \frac{mv^2}{2}$. Daremo a questa grandezza il nome di *Energia*; più specificamente, visto il suo legame con la velocità, tale grandezza viene detta: "***Energia Cinetica***" (E_C).

Alla luce di questa nuova definizione, la (2) verrà riscritta nel seguente modo:

$$L_T = E_C^B - E_C^A \text{ oppure } L_T = \Delta E_C ; \qquad (3)$$

cioè, il lavoro totale è dato dalla variazione dell'energia cinetica. Questo risultato (espressione (3) oppure (2)) viene detto: "***Teorema dell'energia cinetica***"[10].

Dimostriamo il teorema.

Ci limiteremo a dimostrarlo per forze costanti lungo un tratto rettilineo.

Immaginiamo un corpo fermo in un punto *O*. Ad esso viene applicata una forza risultante[11] costante, che lo fa muovere lungo una traiettoria rettilinea, in modo da

(9) Per il caso generale, la dimostrazione richiede strumenti matematici superiori (analisi infinitesimale).

(10) In molti testi si trova l'espressione: "Teorema delle forze vive"; questo perché anticamente la quantità mv^2 veniva chiamata "vis viva" (forza viva).

(11) Abbiamo già detto che considerare una sola forza (invece di più forze) con la stessa direzione dello spostamento (invece di formare con esso un certo angolo), non ci fa perdere di generalità (fine paragrafo 1.2 e inizio paragrafo1.4).

farlo arrivare in A con la velocità v_A e in B con la velocità v_B. Calcoliamo il lavoro nel tratto OA (siamo nel Caso I):

$$L_{O\to A} = F \cdot OA = ma\frac{at^2}{2} = \frac{m(at)^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} = E_C^A .$$

Ripetendo il ragionamento nel tratto OB, abbiamo: $L_{O\to B} = \frac{mv_B^2}{2} = E_C^B$.

D'altra parte $L_{O\to B} = L_{O\to A} + L_{A\to B}$ [12], da cui: $L_{A\to B} = L_{O\to B} - L_{O\to A} = E_C^B - E_C^A$.

Q.E.D.

Abbiamo mostrato il teorema nel caso in cui forza e spostamento abbiano lo stesso verso, tuttavia esso rimane valido anche se la forza è antiparallela allo spostamento; in questo caso il lavoro sarà negativo e il corpo subirà una diminuzione di velocità.

Il teorema dell'energia cinetica ci dice che quando il lavoro totale è positivo si ha:

$$\Delta E_C > 0 \quad \rightarrow \quad E_C^{finale} - E_C^{iniziale} > 0 \quad \rightarrow \quad E_C^{finale} > E_C^{iniziale} .$$

Alla fine dunque, il corpo si ritrova con un'energia cinetica più grande di quella che aveva all'inizio. Possiamo interpretare fisicamente questo risultato, dicendo che il lavoro *trasferisce* energia cinetica al corpo. È uso chiamare il lavoro positivo: "*Lavoro motore*".

Quando il lavoro totale è negativo si ha:

$$\Delta E_C < 0 \quad \rightarrow \quad E_C^{finale} < E_C^{iniziale} .$$

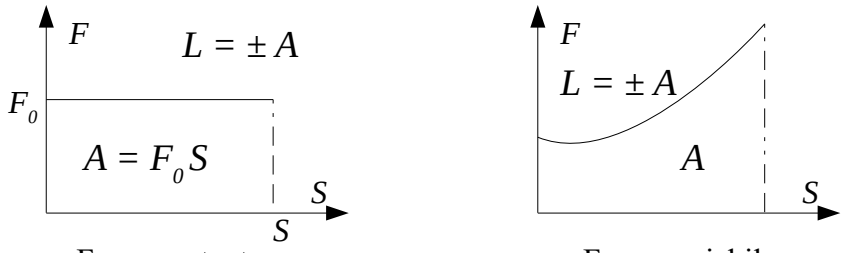
In questo caso diremo che il lavoro *toglie* energia cinetica al corpo. È uso chiamare il lavoro negativo: "*Lavoro resistente*".

(12) È facile mostrare l'additività del lavoro: $L_{O\to B} = F \cdot OB = F(OA + AB) = F \cdot OA + F \cdot AB = L_{O\to A} + L_{A\to B}$

3. Lavoro della forza elastica

3.1 Lavoro di una forza variabile, con spostamento rettilineo

La figura seguente ci dà un'indicazione di come si possa valutare il lavoro con una forza che varia durante lo spostamento. In essa sono presentati dei grafici in cui ad ogni punto dello spostamento si fa corrispondere il valore della forza.



Forza costante Forza variabile

Nella parte sinistra è riportato il caso che già conosciamo: il lavoro di una forza di modulo costante F_0, quando il corpo si sposta di un tratto S (si noti come al variare di S, la forza mantenga sempre lo stesso valore). Come si vede, l'area della superficie delimitata dal grafico della forza, rappresenta proprio il valore assoluto del lavoro (l'area è sempre positiva).

È possibile mostrare che questo è un risultato del tutto generale. Nella parte destra della figura è riportato il grafico di una forza che varia il valore del suo modulo durante lo spostamento. Se si riesce a determinare l'area della figura, si riesce anche a determinare il lavoro della forza, bisogna solo inserire il segno giusto individuando in quale dei tre casi ci troviamo.

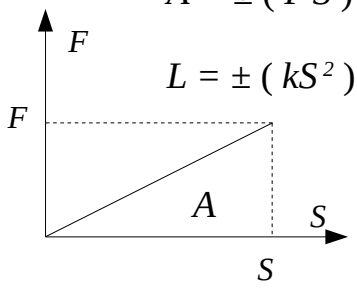
3.2 Lavoro della forza elastica

Consideriamo un corpo elastico (pensiamo ad una molla per fissare le idee) e indichiamo con S l'allungamento (o l'accorciamento) della molla. In altre parole, la distanza tra il punto O in cui la molla si trova a riposo e un generico punto P, in cui la molla non si trova all'equilibrio (vedi figure delle molle a seguire). Il verso del vettore spostamento $\vec{S}$ sarà dato a seconda che lo spostamento sia stato effettuato da

O a P, o viceversa. Ricordiamo inoltre, che la forza applicata dalla molla ad un corpo è direttamente proporzionale a S: $F = kS$ (legge di Hook); pertanto il grafico F–S, sarà costituito da una retta passante per l'origine.

$$A = \pm (F S) / 2$$

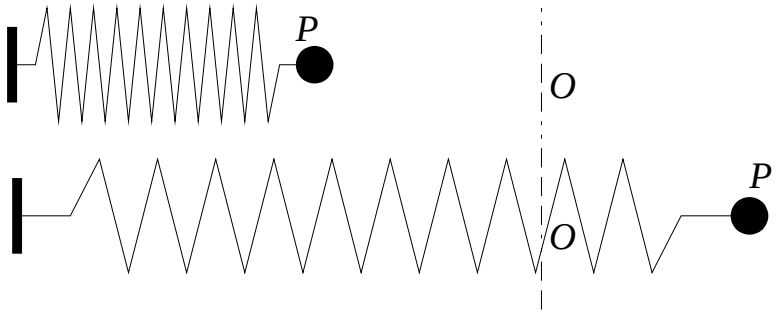
$$L = \pm (kS^2) / 2$$



Da quanto detto nel paragrafo precedente, possiamo determinare il valore assoluto del lavoro effettuato dalla forza elastica, calcolando l'area del triangolo che ha per base il massimo allungamento o accorciamento effettuato dalla molla (che qui abbiamo genericamente indicato con S, visto che lo consideriamo come variabile) e per altezza, la forza corrispondente ad esso ($F = kS$), abbiamo:

$$L = \pm \frac{kS^2}{2}.$$

Per determinare il segno del lavoro, diamo un'occhiata alla figura sottostante. In essa vi è raffigurata una molla nelle due possibili configurazioni (allungata e accorciata). Il punto P rappresenta la generica posizione fuori dall'equilibrio, mentre il punto O determina la posizione a riposo della molla. Il cerchio nero rappresenta il corpo sul quale è applicata la forza elastica.



$$L_{P \to O} > 0$$

$$L_{O \to P} < 0$$

- In entrambe le configurazioni, quando il corpo passa dal punto P al punto O, la forza elastica ha lo stesso verso dello spostamento (il verso della forza con la quale la molla agisce sul corpo infatti, è sempre quello che tende a riportare il corpo nella posizione di riposo della molla). Il lavoro sarà quindi positivo.
- Quando invece il corpo si allontana da O, in entrambi i casi il verso della forza elastica è contrario a quello dello spostamento (il verso della forza non cambia rispetto al caso precedente, mentre cambia quello dello spostamento). Il lavoro

sarà quindi negativo.

Ricapitolando: il lavoro è negativo quando il corpo si allontana da O, mentre sarà positivo quando si muove verso O. Quest'ultimo risultato ci servirà in seguito quando parleremo di energia potenziale elastica.

4. Forze conservative, Energia Potenziale ed Energia Meccanica

4.1 Energia potenziale gravitazionale

I Fatti.

Consideriamo due sistemi:

Sistema A. Corpo lanciato in alto. Parte da un piano di riferimento con una velocità *v* (vedi figura alla pagina successiva). Esamineremo il caso in cui la resistenza dell'aria sia trascurabile cosicché potremo considerare la forza peso come l'unica forza agente.

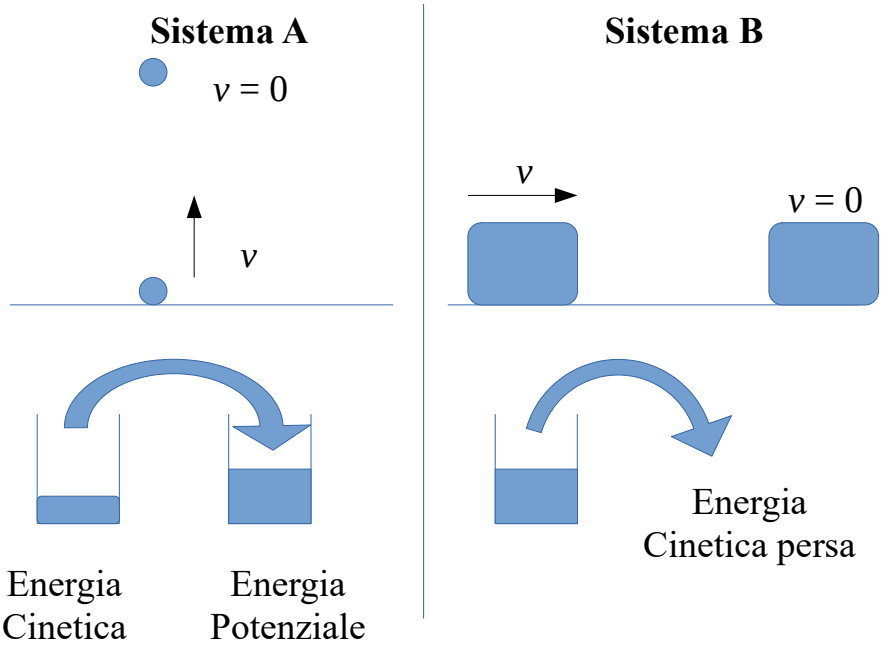
Sistema B. Corpo lanciato su un piano orizzontale con velocità *v* (vedi figura alla pagina successiva). L'unica forza agente è la forza di attrito.

Fase 1. Entrambi i corpi diminuiscono la loro velocità fino a fermarsi. Questo vuol dire che l'Energia Cinetica (E_c) che avevano alla partenza viene perduta. E' stata tolta dal lavoro dell'unica forza agente (il peso per il *sistema A* e la forza di attrito per *B*, si osservi che in questa fase il lavoro è negativo). Nella fase 1 pertanto, i due sistemi si comportano allo stesso modo.

Fase 2. Il corpo del *sistema A*, nella fase di caduta si riprende l'energia cinetica che aveva perduto nella fase di salita (il corpo si ritrova con la stessa energia cinetica con cui era partito, nel momento in cui esso ritorna al punto di partenza). In questo caso è ancora il lavoro della forza peso che restituisce l'Energia Cinetica (si osservi che nella discesa il lavoro è positivo).

Nel caso del *sistema B* invece, il lavoro della forza di attrito non è in grado di restituire l'energia cinetica. È chiaro che si può sempre ridare energia cinetica al corpo con un'altra spinta, ma in questo caso è il lavoro di un'altra forza che fornisce l'energia perduta e non il lavoro della forza di attrito, responsabile della precedente perdita.

Costruzione di un quadro teorico entro cui sistemare i fatti sopra descritti.



Per quanto riguarda il ***sistema A***, possiamo pensare che durante la fase di salita, l'energia cinetica non venga persa, ma venga accumulata *da qualche parte*, in modo tale da poter essere restituita, nella fase di caduta. Chiameremo ***"Energia Potenziale gravitazionale"*** (E_p) l'energia accumulata dal sistema, mano a mano che il corpo sale. E' chiaro che tanta energia cinetica si perde e tanta energia potenziale si accumula. Si può illustrare ciò con una metafora. Immaginiamo un *contenitore per l'energia cinetica e uno per l'energia potenziale*[13] (vedi figura sopra). Nella fase di salita si svuota il contenitore dell'energia cinetica mentre si riempie quello dell'energia potenziale. Nella fase di discesa avviene il contrario. In ogni caso appare evidente che istante per istante, la quantità di energia presente nei due contenitori è sempre la stessa. Cioè: $E_c + E_p = costante$. La somma tra l'energia cinetica e quella potenziale viene detta, "***Energia Meccanica***": $E_m = E_c + E_p$. Possiamo quindi dire che **per il sistema A l'energia meccanica rimane invariata (si conserva)**.

Per il **sistema B** invece ciò non avviene; non si può definire un'energia potenziale dato che non viene restituita l'energia cinetica persa. Continuando con la metafora dei contenitori: l'energia che fuoriesce dal *contenitore dell'energia cinetica* si perde

(13) Quando non c'è pericolo di confusione, parleremo semplicemente di "*Energia potenziale*" in luogo di "*Energia potenziale gravitazionale*".

perché non c'è il contenitore dell'energia potenziale in grado di raccoglierla[14].

Queste semplici considerazioni riescono a dar conto dei fatti descritti. L'unica cosa che potrebbe lasciare un po' perplessi è il luogo misterioso in cui viene accumulata l'energia Potenziale. Naturalmente non può essere identificato con un luogo fisico. Per ovviare a ciò, potremmo affinare il nostro linguaggio dicendo che: L'energia cinetica persa si trasforma in un'altra forma di energia, che chiameremo "*Energia Potenziale*".

Forze conservative.

Una forza, il cui lavoro è in grado di restituire ad un corpo, l'energia cinetica tolta precedentemente, si chiama "*Forza Conservativa*".

Ciò va inteso valido non solo per il punto di partenza che abbiamo considerato nel nostro esempio, ma per ogni punto (nel suddetto esempio, in ogni punto per cui passa il corpo nella fase 2 di ritorno, vi ritrova la stessa energia cinetica che aveva all'andata). Possiamo quindi affermare che: *se un corpo è sottoposto solo ed esclusivamente a forze conservative, ogni volta che passa (o ripassa) per un dato punto, avrà in esso sempre la stessa energia cinetica, indipendentemente da come ci arriva* (salendo o scendendo); in nota 15 viene preso in considerazione un esempio un po' più generico della semplice salita e discesa.

Dall'analisi dei sistemi A e B, si vede che la forza peso è una forza conservativa, mentre la forza d'attrito non lo è. In particolare le forze che, come la forza di attrito, tolgono energia ad un corpo, vengono dette: "*Forze dissipative*".

Obiezione 1. Lancio un oggetto su una mensola posta in alto. Il lavoro toglie *energia cinetica* al corpo, ma dato che non c'è la fase di discesa, non gli viene restituita.

Risposta. Il lavoro della forza conservativa deve essere in grado di restituirla, ma non lo deve fare necessariamente.

Obiezione 2. Come la mettiamo con i corpi che già inizialmente si trovano in alto?

Risposta. Non possono esserci andati da soli, ci sarà stato qualcosa nel passato che li

(14) Nell'ambito della termodinamica si vedrà che in realtà anche questa energia non viene persa, ma viene trasferita all'interno dei corpi sotto forma di un altro tipo di energia detta: *Energia interna*.

ha sollevati.

Obiezione 3. Se sollevo un corpo con una velocità uniforme l'energia cinetica rimane costante. Come può poi il lavoro della forza conservativa restituire un'energia che non gli ha tolto?

Risposta. Se il moto è uniforme vuol dire che la forza che si applica per sollevare il corpo deve essere uguale e contraria al peso. Se non ci fosse il peso il moto risulterebbe accelerato arrivando così ad avere una velocità maggiore rispetto al caso con la forza peso applicata. Ciò vuol dire che il lavoro del peso si è "*mangiato*" una parte di *energia cinetica*. Per quantificarla basterà calcolare il lavoro della sola forza peso (senza cioè considerare il lavoro della forza che solleva il corpo). In altre parole, quando si solleva un corpo con velocità costante, il lavoro della forza che alza il corpo trasferisce ad esso l'esatta *energia cinetica* che gli viene tolta dal lavoro del peso e che viene trasformata in *energia potenziale*(15).

Come abbiamo visto quindi, in presenza di sole forze conservative l'energia meccanica si conserva; cioè, considerando un corpo che si sposta da un generico punto *A* ad un punto *B*, si ha:

$$E_m^B = E_m^A \quad \rightarrow \quad E_C^B + E_P^B = E_C^A + E_P^A \,.$$

Portando a sinistra l'energia potenziale e a destra quella cinetica abbiamo:

$$E_P^B - E_P^A = -\left(E_C^B - E_C^A\right),$$

da cui:

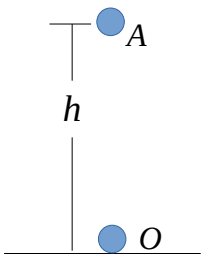
$$\Delta E_P = -\,\Delta E_C \tag{4}$$

(15) Un esempio in cui la traiettoria è diversa dalla semplice salita e discesa che abbiamo sin qui considerato, è l'orbita dei pianeti attorno al Sole. In generale essi si muovono lungo orbite ellittiche con uno dei fuochi occupato dal Sole. Il punto di distanza minima da esso, viene detto Perielio, mentre quello di distanza massima è chiamato Afelio. Al Perielio il pianeta ha il massimo di energia cinetica. Allontanandosi da esso perde energia cinetica (accumulandola sotto forma di energia potenziale); quando arriverà all'Afelio, avrà il minimo di energia cinetica e il massimo dell'energia potenziale. Superato l'Afelio, il pianeta riacquista energia cinetica perdendo energia potenziale, ritrovandosi al Perielio con la stessa velocità che aveva precedentemente (il che gli permette di continuare nel suo moto perenne attorno al Sole). Naturalmente il discorso fatto per il Perielio potremmo ripeterlo per un qualsiasi punto della traiettoria ellittica: ogni volta che il pianeta passa per un determinato punto ci arriva sempre con la stessa velocità del ciclo precedente.

Questa relazione codifica quanto abbiamo già detto: la quantità di energia cinetica che si perde (o si acquista) è pari alla quantità di energia potenziale che si acquista (o si perde). La quantità in valore assoluto è la stessa ma se l'una è positiva (acquisizione di energia), l'altra è negativa (perdita di energia)[16].

La forza peso non è l'unica forza conservativa; un altro notevole esempio è costituito dalla *forza elastica*. Basta immaginare una pallina che vada ad urtare su una molla. Dapprima l'energia cinetica della pallina viene sottratta dal lavoro della forza elastica. Quando la pallina si ferma tutta l'E_C si è trasformata in *Energia Potenziale elastica*. Subito dopo, il lavoro della forza elastica ritrasferisce alla pallina l'E_C che prima gli aveva sottratto. Ad ogni forza conservativa si può dunque associare un'energia potenziale; così ci sarà l'energia potenziale gravitazionale, l'energia potenziale elastica, l'energia potenziale elettrostatica e così via. Se agiscono diversi tipi di forze conservative ci sarà un'energia potenziale totale data dalla somma delle energie potenziali.

4.2 Calcolo dell'energia potenziale gravitazionale.



Come si evince dall'obiezione 2, un corpo, per la semplice ragione di trovarsi in un punto *A* posto ad una certa altezza *h*, possiede un'*energia potenziale*; vogliamo calcolare tale energia (la velocità in *A* non deve essere necessariamente nulla). Possiamo pensare di far arrivare il corpo nel punto *A* con la velocità dovuta, lanciandolo da un punto *O* posto su un piano, che chiameremo: "*Piano di riferimento*".

La quantità di Energia Potenziale ΔE_p accumulata nel punto *A* sarà pari, in valore assoluto, all'Energia Cinetica che il corpo perde quando si sposta da *O* ad *A*[17]. Tenendo presente la (4) e considerando il *teorema dell'Energia Cinetica* (pag.9), si ha:

$$\Delta E_p = -\Delta E_C = -L_{O\to A} = -(-Ph) = mgh\,.$$

(16) Il segno *meno* nella (4), cambiando segno ad una delle due, permette di uguagliare le due quantità.

(17) Il corpo non deve necessariamente spostarsi dal punto O al punto A. Stiamo solo cercando di quantificare il valore dell'E_P di una corpo posto in A.

Abbiamo così:

$$E_p^A - E_p^O = mgh \quad \rightarrow \quad E_p^A = mgh + E_p^O \ ^{(18)}.$$

Osserviamo che:

- il corpo possiede la stessa energia potenziale in tutti i punti posti alla stessa altezza, cioè in tutti i punti che si trovano su un piano orizzontale (piano equipotenziale[19]), in particolare questo vale anche per il piano di riferimento (piano in cui si trova il punto *O*).
- Per calcolare l'Energia Potenziale in A, bisogna sapere quanto vale l'Energia Potenziale nel punto *O*. Se assumiamo che l'Energia Potenziale in tale punto sia nulla, cioè $E_P^O = 0$, possiamo scrivere:

  $$E_p^A = mgh\,.$$

  Questa assunzione, per quanto detto nel punto precedente, ci permette di dire che il *piano di riferimento* è caratterizzato dal fatto che un corpo ha energia potenziale nulla, in tutti i suoi punti.

In coda al paragrafo vogliamo mettere in evidenza la relazione tra il lavoro delle forze conservative e l'energia potenziale; dalla (4) e dal teorema dell'energia cinetica si ottiene: $L = -\Delta E_p$ o, più esplicitamente:

$$L_{\text{punto iniziale} \rightarrow \text{punto finale}} = E_P^{\text{punto iniziale}} - E_P^{\text{punto finale}} \qquad (5)$$

Arbitrarietà del piano di riferimento

Non sarà sfuggito a molti lettori che l'assunzione fatta sopra è completamente arbitraria. Si può considerare a buon diritto come piano di riferimento (piano in cui viene deciso che l'energia potenziale di un corpo posto su di esso valga zero), il piano di un tavolo, il piano del pavimento, il piano stradale, ecc. Non c'è una ragione fisica per preferire l'uno o l'altro. Naturalmente il valore dell'E_P (e quindi anche quello

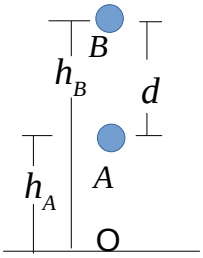
(18) Si sarebbe ottenuto lo stesso risultato pensando ad un corpo che si sposti da *A* a *O*, infatti:

$$E_P^O - E_P^A = -\Delta E_C = -L_{A \rightarrow O} = -mgh \quad \rightarrow \quad E_p^A = mgh + E_p^O\,.$$

(19) In realtà, visto che il piano è una porzione della superficie terrestre, dovremmo parlare di superficie equipotenziale.

dell'energia meccanica) cambia a seconda della scelta[20]. Questo può apparire strano: sembrerebbe che le leggi fisiche dipendano da una scelta arbitraria.

In realtà questo non avviene, infatti *nelle leggi fisiche non compare mai l'energia potenziale, ma sempre la differenza di tale energia* fra due punti dati: (ΔE_p). Basta riflettere un po' per capire che tale differenza non cambia se si decide di scegliere un altro piano di riferimento. È facile mostrarlo per la forza peso; un corpo che passa dal punto A al punto B, varierà la sua energia potenziale nel modo seguente:



$$\Delta E_P = E_P^B - E_P^A = mgh_B - mgh_A = mg(h_B - h_A) = mgd\ .$$

Se si cambia piano di riferimento, cambierà il valore di h_A, quello di h_B, ma non il valore di d (la distanza tra i punti A e B rimarrà la stessa). Pertanto ΔE_p avrà sempre lo stesso valore indipendentemente dalla scelta del piano di riferimento.

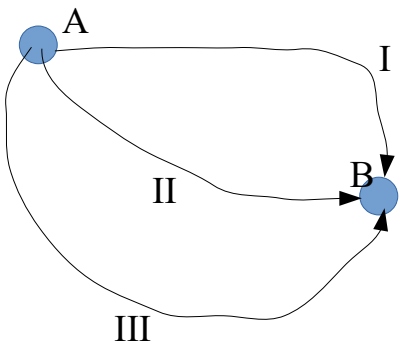
Visto che nelle leggi fisiche compare solo ΔE_p, possiamo stare tranquilli sul fatto che esse non dipendano da una nostra scelta.

Obiezione 4. Se consideriamo, la relazione: $E_C^B + E_P^B = E_C^A + E_P^A$ vediamo che non compare ΔE_p, ma proprio l'energia potenziale.

Risposta. La comparsa dell'Energia Potenziale è solo apparente; abbiamo visto infatti che riordinando i termini si ottene la (4), cioè $\Delta E_P = -\Delta E_C$, che dipende solo dalla differenza di energia potenziale.

(20) Nel gergo fisico si dice che l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva.

4.3 Proprietà fondamentale delle forze conservative



Le forze conservative hanno una notevole proprietà che si può enunciare nel seguente modo:

Il lavoro di una forza conservativa, quando un corpo si sposta da un punto A ad un punto B, non dipende dal percorso: $L_I = L_{II} = L_{III}$. Quello che conta sono unicamente *il punto di partenza e il punto di arrivo*.

Una conseguenza immediata di quanto detto, consiste nel fatto che il lavoro della forza conservativa sarà nullo, nel caso in cui il corpo ritorni al punto di partenza[21] (dato che il punto di partenza e il punto di arrivo è lo stesso, la situazione è equivalente a quella di un corpo che non si è mai spostato).

Questa proprietà ha un importante risvolto pratico. Sarà infatti possibile scegliere un percorso tra A e B, diverso da quello effettivamente effettuato dal corpo, in modo tale da rendere più semplice il calcolo del lavoro.

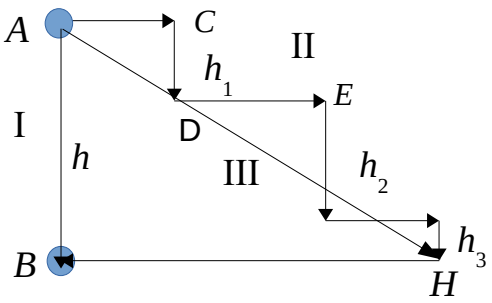
Dimostrazione. Quando un corpo si sposta da A a B, il lavoro è dato da (teorema dell'energia cinetica):

$$L_T = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}. \qquad (6)$$

D'altra parte se il corpo è sottoposto solo a forze conservative, ogni volta che passa per un punto avrà (in tale punto), sempre la stessa energia cinetica, indipendentemente da come ci arriva. In particolare questo sarà vero per i punti A e B; pertanto il lavoro calcolato tramite la (6) darà sempre lo stesso risultato[22], indipendentemente dal percorso.

(21) Questa proprietà può essere presa come definizione di forza conservativa: *Una forza si dice conservativa se il suo lavoro su un qualsiasi percorso chiuso è sempre pari a zero*.

(22) Ricordiamo che la dimostrazione della (6) nel caso generale (traiettorie curvilinee e forze che variano lungo tali traiettorie), richiede comunque strumenti matematici superiori.



Dimostreremo ora l'indipendenza del lavoro della forza peso per alcuni percorsi specifici illustrati nella figura a fianco. Consideriamo un corpo di massa m che si trova nel punto A. Calcoleremo il lavoro della forza peso quando il corpo si sposta dal punto A al punto B, prima lungo il percorso I, poi lungo il percorso II (formato dai tratti $AC + CD + DE + \ldots + HB$) e infine lungo il percorso III ($AH + HB$).

$$L_I = mgh\,.$$

$$L_{II} = 0 + mgh_1 + 0 + mgh_2 + 0 + mgh_3 + 0 = mg\left(h_1 + h_2 + h_3\right) = mgh\,.$$

$$L_{III} = P_{\parallel} \cdot AH + 0 = \frac{h}{AH} P \cdot AH = mgh\,.$$

E' evidente che si ottiene lo stesso risultato (con $P_{\parallel} = \frac{h}{AH} P$ abbiamo indicato il modulo della componente del peso, parallela al tratto AH).

Si osservi che quando il corpo si sposta nei tratti orizzontali del percorso II o del percorso III, oltre al peso agirà anche un'altra forza che in genere sarà *non conservativa*. Noi però siamo interessati solo al lavoro del peso e, dato che esso è perpendicolare allo spostamento, tale lavoro sarà nullo.

4.4 Definizione generale dell'Energia Potenziale

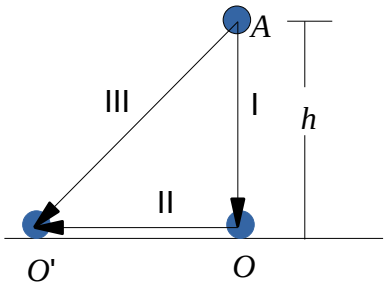
Come abbiamo visto, l'*energia potenziale gravitazionale* di un corpo posto in un punto A, ad altezza h dal piano di riferimento scelto, è data da:

$$E_p = mgh\,;$$

ma $mgh = L_{A \to O}$ è anche il lavoro che deve fare il peso (forza conservativa), quando il corpo si sposta dal punto in cui si trova fino al piano di riferimento. Questo in realtà è un risultato generale, vale sempre qualunque sia la forza conservativa che agisca: *L'Energia Potenziale è pari al lavoro della forza conservativa, quando il corpo si sposta dal punto in cui si trova al piano di riferimento*.

In quanto detto sopra si potrebbe osservare che il *piano di riferimento* ha infiniti

punti e quindi cosa si intende con "*il corpo si sposta al piano di riferimento*"?



Sembrerebbe naturale pensare al punto sulla verticale per A (punto O). Faremo vedere però, che questa limitazione non è necessaria[23]. Considerando Infatti, O' invece di O, il calcolo dell'E_P porta allo stesso risultato; vediamo perché. Cominciamo a considerare O, allora l'E_P si otterrà calcolando il lavoro lungo il percorso I, quindi sarà $E_p^A = mgh$. Se consideriamo O', l'E_P si otterrà calcolando il lavoro lungo il percorso III. Ma il lavoro sul percorso III è equivalente alla somma dei lavori lungo I e II (infatti i punti di partenza e di arrivo sono gli stessi), si avrà quindi $E_p^A = mgh + 0$. A questo punto possiamo dire, in modo definitivo, che: "***L'energia potenziale è pari al lavoro della forza conservativa quando il corpo si sposta dal punto in cui si trova ad un qualsiasi punto posto sul piano di riferimento***".

In formule, se indichiamo con A il punto in cui è posizionato il corpo, abbiamo:

$$E_p^A = L^{\text{forza conservativa}}_{A \rightarrow \text{punto del piano di riferimento}}$$ [24].

Si noti che questa definizione, nel caso della forza peso, è compatibile anche con una scelta del piano di riferimento posto sopra il corpo. In tal caso, per spostare il corpo fino al suddetto piano, oltre al peso, deve agire un'altra forza. Ma nella definizione dell'E_P si considera il solo lavoro della forza peso che, nel caso in questione, sarà negativo. Quindi in definitiva, l'Energia Potenziale gravitazionale di un corpo, posto sotto il piano di riferimento, risulterà negativa.

(23) Lo faremo vedere per la forza peso, ma ribadiamo che la validità è generale quale che sia la forza conservativa che agisca.

(24) Questa relazione rimane valida anche se agiscono forze non conservative, basta limitare il calcolo del lavoro alle sole forze conservative. In alcuni testi si legge: "*L'energia potenziale è pari al lavoro* ***che deve fare la forza conservativa*** *per spostare il corpo dal punto in cui si trova al piano di riferimento*". Ma questa definizione non regge nel caso agiscano anche forze non conservative. Infatti in tal caso non è la forza conservativa ma quella risultante, che sposta il corpo al piano di riferimento. In realtà questa definizione non regge neanche in presenza di sole forze conservative, Si pensi al caso in cui il piano di riferimento è posto più in alto del corpo; come si fa a calcolare il lavoro che ***deve fare il peso*** per portare il corpo più in alto?

4.5 Energia potenziale elastica

Consideriamo una molla e un corpo a cui la molla applica una forza elastica (vedi figura a pag. 12). Abbiamo già detto che la forza elastica è una forza conservativa, pertanto è possibile definire un'*energia potenziale elastica*. Visto che il corpo è vincolato a muoversi su una retta, più che di un piano di riferimento dobbiamo parlare di punto di riferimento. La scelta più semplice sarà il punto in cui la molla risulta a riposo – punto *O* della figura citata[25] (ricordiamo che tale scelta è completamente arbitraria); in questo modo quando il corpo si troverà nel punto *O* avrà energia potenziale nulla.

Dobbiamo ora valutare l'energia potenziale nel caso in cui il corpo si trovi in in un qualsiasi altro punto *P*.

Per quanto detto nel paragrafo precedente, basterà calcolare il lavoro della forza elastica, quando il corpo si sposta dal punto *P* al punto *O*. Abbiamo già calcolato questo lavoro nel paragrafo 3.2 (a pag. 11), pertanto detta *k* la costante elastica e posto $\overline{PO} = S$, avremo:

$$E_P^{el} = \frac{kS^2}{2}.$$

L'energia potenziale elastica è sempre positiva a prescindere dal fatto che il punto *P* si trovi a destra o a sinistra di *O*. Nel paragrafo 3.2 abbiamo infatti visto che ogni volta che il corpo si sposta verso *O*, il lavoro della forza elastica è sempre positivo, a prescindere dal fatto che il corpo si trovi a destra o a sinistra di *O*[26].

4.6 Teorema della conservazione dell'Energia Meccanica.

Enunciamo ora il teorema della conservazione dell'energia meccanica, già

(25) Per una molla libera di ruotare attorno ad un punto, le superfici equipotenziali saranno sfere centrate nel punto di rotazione; la scelta più semplice, per la superficie di riferimento in questo caso, è quella in cui la sfera ha per raggio la lunghezza a riposo della molla.

(26) Se avessimo fatto un'altra scelta per il punto di riferimento, diciamo *O*', allora avremmo un'energia potenziale elastica negativa, ogni volta che la posizione del corpo si trovi tra *O* e *O*'. Infatti: $E_P^{el} = L_{P \to O'}$; ma noi sappiamo che quando il corpo si sposta da *P* a *O*' la forza elastica punta verso *O*, mentre il vettore spostamento punta verso *O*'. pertanto il lavoro in questione sarà negativo.

visto in precedenza: "***Se un corpo (o un sistema di corpi) è sottoposto solo ed esclusivamente a forze conservative, allora la sua energia meccanica si conserva***[(27)]**".**

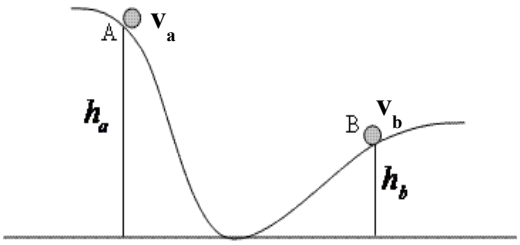
Se indichiamo con A e B due punti qualsiasi lungo la traiettoria del corpo, possiamo esplicitare questo enunciato con le seguenti relazioni equivalenti:

$$E_m = Costante \text{ , oppure } E_m^B = E_m^A \text{ , oppure } \Delta E_m = 0 .$$

Scrivendo queste relazioni in termini di Energia Cinetica ed Energia Potenziale abbiamo:

$$E_C + E_P = Costante \text{ , oppure } E_C^B + E_P^B = E_C^A + E_P^A \text{ oppure } \Delta E_P = -\Delta E_C \text{ [(28)]}$$

(le ultime due erano state già trovate precedentemente).



Se consideriamo il caso in cui agisca solo la *forza peso*, allora la relazione $E_m^A = E_m^B$, potrà essere riscritta nel seguente modo (vedi figura):

$$mgh_A + \frac{mv_A^2}{2} = mgh_B + \frac{mv_B^2}{2} .$$

Si può semplificare tale formula notando che tutti i termini contengono la massa: dividendo per m e moltiplicando per 2 si ottiene:

$$2gh_A + v_A^2 = 2gh_B + v_B^2$$

(27) In realtà l'energia meccanica si conserva anche in presenza di forze che facciano un lavoro nullo; vedi per esempio:
a) la forza di reazione vincolare di un piano o di una guida in assenza di attrito, che costringe il corpo a muoversi lungo una determinata traiettoria – vedi figura a pag. 25 – (in questo caso la reazione vincolare è sempre perpendicolare allo spostamento del corpo; si tenga presente però che le forze di attrito sono ineliminabili, si possono comunque avere casi in cui esse sono trascurabili);
b) la forza di attrito che permette ad una ruota di rotolare senza strisciare (in realtà in questo caso sono sempre presenti forze di deformazione che fanno un lavoro non nullo; anche qui però possono aversi casi in cui tale lavoro può essere trascurato).

(28) L'ultima relazione si ottiene da $E_C^B + E_P^B - (E_C^A + E_P^A) = 0$.

che, non solo è utile nelle applicazioni pratiche, ma ci fa anche vedere che la relazione che lega l'altezza e la velocità raggiunta da un corpo in punti diversi, non dipende dalla massa[29].

(29) Possiamo quindi affermare che il moto *libero* di un corpo in un campo gravitazionale, non dipende dalla sua massa

5. Forze non conservative

5.1 Energia meccanica e lavoro

Considerando la figura di pag. 25, immaginiamo che, calcolando l'energia meccanica in A e in B, si ottenga $E_m^B < E_m^A$. Dobbiamo necessariamente concludere che durante il tragitto siano intervenute forze non conservative (nell'esempio di figura sarà la forza di attrito). Chi è che ha tolto energia meccanica al corpo? Certo non il lavoro delle forze conservative (esse infatti lasciano invariata l'energia meccanica), quindi sarà il lavoro delle sole forze non conservative ad aver provocato questa variazione di energia meccanica. A questo punto potremo scrivere: $L_{NC} = \Delta E_m$. Vediamo ora come formalizzare questo concetto.

Indicando con L_T il lavoro totale delle forze che agiscono su un corpo (o su un sistema di corpi), il teorema dell'energia cinetica (teorema delle forze vive) ci dice che:

$$L_T = \Delta E_C ;$$

cioè, il lavoro totale trasferisce o toglie *energia cinetica* al corpo (o al sistema) a seconda che sia positivo o negativo.

Se indichiamo con L_{NC} e L_C rispettivamente il lavoro totale delle forze *Non Conservative* e quello delle forze *Conservative*, allora $L_T = L_{NC} + L_C$ e quindi potremo riscrivere il teorema dell'energia cinetica nel seguente modo:

$$L_{NC} = \Delta E_C - L_C .$$

Nel capitolo precedente abbiamo visto (formula (5) a pag.19) che: $L_C = -\Delta E_P$ (tutte le relazioni matematiche del capitolo precedente si riferiscono alle forze conservative); pertanto scriveremo $L_{NC} = \Delta E_C + \Delta E_P$, da cui:

$$L_{NC} = \Delta E_m , \qquad (7)$$

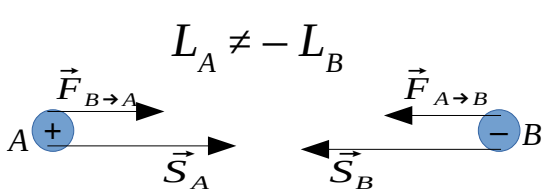
vale a dire che il lavoro totale di tutte le forze non conservative agenti su un corpo (o su un sistema), trasferisce o toglie energia meccanica al corpo stesso.

Nel caso si prendano in considerazione punti materiali o corpi rigidi (ideali), l'unico lavoro diverso da zero è quello dovuto esclusivamente alle forze esterne.

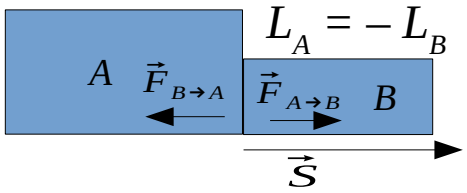
Nel caso si considerino invece sistemi di particelle o corpi macroscopici reali[30], le cose si fanno più complicate: in tal caso infatti, va tenuto conto che nel lavoro totale ci sarà anche un contributo dovuto al lavoro delle forze interne.

5.2 Sistema di corpi – Energia interna

Consideriamo ora un sistema di corpi. Come abbiamo già accennato, per la valutazione del lavoro totale dobbiamo prendere in considerazione anche i lavori delle forze interne. Sappiamo che per il principio di azione e reazione, la somma vettoriale di tutte le forze interne è nulla, ciò però non implica che la stessa cosa valga anche per la somma dei lavori. Per convincersene basta guardare la figura che segue, in cui viene valutato il lavoro totale delle forze interne per due sistemi dal comportamento molto diverso, ognuno dei quali (per semplicità di ragionamento) è formato da due corpi.



$L_T^{int} = L_A + L_B = (F_{A\to B} \cdot S_B) + (F_{B\to A} \cdot S_A) \neq 0$



$L_T^{int} = L_A + L_B = (F_{A\to B} \cdot S) + (-F_{B\to A} \cdot S) = 0$

- Con L_A abbiamo inteso il lavoro della forza $\vec{F}_{A\to B}$, con cui il corpo A agisce sul corpo B; analogamente per L_B.
- $\vec{F}_{A\to B}$ e $\vec{F}_{B\to A}$ sono forze di egual modulo e verso contrario.

Dalla figura si vede che in generale, la somma dei lavori delle forze interne è nulla, solo nel caso si considerino forze che agiscano per contatto diretto (parte destra della figura[31]). In caso contrario, come per esempio nel caso di due cariche elettriche (parte sinistra della figura), ciò non è più vero[32].

(30) I corpi macroscopici sono comunque dei sistemi di particelle interagenti se si considerano gli atomi e le molecole come i costituenti di tale sistema.

(31) Le forze sono sempre uguali e contrarie mentre il vettore spostamento è lo stesso per entrambi i corpi. Si tenga comunque presente che la figura presuppone che ci sia una forza esterna che spinga il sistema verso destra di un tratto *S*.

(32) Somma di due lavori positivi. Si osservi che le due forze avranno lo stesso modulo anche se le → segue a pag29

Per semplificare la trattazione *facciamo l'ipotesi che le forze interne siano tutte di tipo conservativo*. Possiamo fissare le idee pensando al nostro sistema come ad un insieme di particelle legate le une alla altre da molle ideali(33).

Ci sarà quindi un lavoro di queste forze, a cui si sommerà il lavoro delle forze conservative che agiscono dall'esterno(34), avremo pertanto: $L_C = L_C^{int} + L_C^{est}$.

In quanto segue indicheremo con E_C, l'energia cinetica del sistema (somma dell'energia cinetica di tutte le particelle che compongono il sistema). È possibile mostrare che tale energia si può sempre scrivere come la somma di due termini:

$$E_C = E_C^{traslazione} + E_C^k \text{(35)}.$$

E_C^k è l'energia cinetica del sistema, calcolata in un riferimento in cui il suo baricentro risulta fermo. In altre parole si considerano solo i movimenti delle particelle rispetto al baricentro. Potremmo chiamarla *energia cinetica propria*.

L'*energia cinetica di traslazione* rappresenta l'energia cinetica del sistema visto come un tutt'uno(36); viene calcolata determinando l'energia cinetica di un corpo (punto materiale) posto nel baricentro G, con una massa M pari a quella dell'intero sistema: $E_C^{traslazione} = (M v_G^2)/2$, dove v_G è la velocità del baricentro.

A questo punto il teorema dell'energia cinetica avrà la forma:

$$L_{NC} + L_C = \Delta E_C^{traslazione} + \Delta E_C^k;$$

cariche sono diverse; mentre subiranno spostamenti diversi, qualora le due cariche avessero masse diverse.

(33) A rigore si devono pensare le sole particelle come costituenti il sistema; in questo modello quindi le molle rappresentano solo una schematizzazione delle forze che si instaurano tra le particelle.

(34) Nel caso ci sia come unica forza conservativa esterna la forza peso, è possibile mostrare che $E_P^{est} = Mgh_G$, dove M rappresenta la massa complessiva del sistema, mentre h_G rappresenta l'altezza del baricentro.

(35) Nel caso il sistema nel suo complesso abbia un moto di rotazione, dovremmo tirar fuori da E_k l'energia dovuta al movimento collettivo di rotazione delle particelle (istante per istante tutte le particelle hanno una velocità angolare comune attorno ad un punto). Tale energia, detta *energia cinetica di rotazione del sistema*, sarà comunque inglobata in quella che più avanti descriveremo come *energia meccanica* del sistema e che indicheremo con E_m (vedi la (10)). Pertanto l'aver evitato questa considerazione non comporterà alcuna differenza nelle conclusioni a cui arriveremo. Da un punto di vista formale avremmo: $E_C^k = E_C^{rot} + E_C^{int}$, dove con E_C^{int} si intende la somma di tutte le energie cinetiche delle particelle rispetto ad un riferimento solidale con il sistema (e quindi partecipe anche del suo moto di rotazione).

(36) A rigore questo è vero se il sistema non ha un moto di rotazione (vedi nota 35 e, più avanti, 39)

sviluppando si ha:

$$L_{NC} + L_C^{est} + L_C^{int} = \Delta E_C^{traslazione} + \Delta E_C^k$$

$$L_{NC} = \left(\Delta E_C^{traslazione} - L_C^{est}\right) + \left(\Delta E_C^k - L_C^{int}\right). \quad (8)$$

Sappiamo che il lavoro delle forze conservative è pari alla variazione dell'energia potenziale cambiata di segno, pertanto: $L_C^{est} = -\Delta E_P^{est}$; $L_C^{int} = -\Delta E_P^{int}$; con E_P^{est} si intende l'energia potenziale del sistema dovuta alle forze conservative che dall'esterno agiscono su di esso (vedi nota 34), mentre con E_P^{int} si intende l'energia potenziale accumulata dal sistema per mezzo delle forze conservative che agiscono tra le particelle. La (8) diventa:

$$L_{NC} = \left(\Delta E_C^{traslazione} + \Delta E_P^{est}\right) + \left(\Delta E_C^k + \Delta E_P^{int}\right). \quad (9)$$

Consideriamo la quantità $E_C^{traslazione} + E_P^{est}$. Essa rappresenta l'energia meccanica del sistema visto come un tutt'uno(37). Se facciamo mente locale all'esempio delle particelle collegate da molle, possiamo immaginare di porre tale sistema in una scatola, di massa trascurabile (rispetto alla massa *M* complessiva delle particelle). L'energia che stiamo prendendo in considerazione quindi, altri non è che l'energia meccanica della scatola(38) e possiamo quindi identificarla con l'energia meccanica E_m, definita nei capitoli precedenti.

Per quanto riguarda la grandezza $E_C^k + E_P^{int}$, la si può vedere come la somma di tutte le energie meccaniche (cinetica e potenziale) delle particelle che compongono il sistema, cioè come una sorta di energia meccanica interna. In *Fisica statistica* questa energia viene chiamata "*Energia Interna*" e viene di solito indicata con *U*.

Alla luce di queste considerazioni possiamo riscrivere la (9):

$$L_{NC} = \Delta E_m + \Delta U^{(39)}. \quad (10)$$

(37) Vedi nota 36 e, più avanti, 39.

(38) Questa energia è pari all'energia meccanica di un punto materiale di massa M, posto nel baricentro del sistema. Nel caso della forza peso come unica forza conservativa esterna, avremo: $E_C^{traslazione} + E_P^{est} = (M v_G^2)/2 + Mgh_G$.

(39) Se, seguendo la nota 35, scriviamo $\Delta E_k = \Delta E_C^{rot} + \Delta E_C^{int}$, la (9) diverrà: → segue a pag31

Ricordiamo che, data la nostra ipotesi di assenza di *forze non conservative* interne, qui L_{NC} va inteso come lavoro totale delle *forze non conservative* che agiscono sul sistema dall'esterno.

Conservazione dell'energia totale

A questo punto possiamo con buona ragione chiamare la grandezza $E_T = E_m + U$: "*Energia Totale*" del sistema. Se ora consideriamo il nostro sistema, isolato; l'ambiente esterno non può compiere lavoro su di esso e pertanto si avrà:

$$\Delta E_T = 0, \tag{11}$$

Cioè l'energia totale di un sistema isolato, si conserva.

Nell'ipotesi ragionevole che l'Universo sia un enorme sistema isolato, possiamo affermare che *l'energia totale dell'Universo rimane costante*.

Sistemi macroscopici

Tutto quanto abbiamo sin qui detto si può applicare ad un corpo macroscopico, dato che esso può considerarsi come un sistema formato da molecole e atomi. Anche il modello a molle cui abbiamo accennato può essere mantenuto, entro certi limiti, per descrivere corpi solidi (le molle costituirebbero una schematizzazione delle forze elettriche intermolecolari); è noto infatti come tale modello dia conto di svariati fenomeni fisici(40).

D'altra parte l'ipotesi di "*assenza di forze interne non conservative*", appare un po' troppo grossolana. Le forze tra molecole in grado di fare lavoro, sono quelle elettriche che in generale non sono conservative (si comportano come forze conservative, solo nel caso statico).

$L_{NC} = \left(\Delta E_C^{traslazione} + \Delta E_C^{\text{rot}} + \Delta E_P^{est}\right) + \left(\Delta E_C^{\text{int}} + \Delta E_P^{int}\right)$. Ponendo: $E_m = E_C^{traslazione} + E_C^{\text{rot}} + E_P^{est}$ (energia meccanica del sistema visto come un tutt'uno) e $U = E_C^{\text{int}} + E_P^{int}$ (somma di tutte le energie meccaniche delle particelle rispetto ad un riferimento solidale con il sistema), si arriva alla (10).

(40) Le considerazioni fatte (abbandonando però il modello con le molle) possono comunque essere applicate anche a gas e liquidi. Per evitarne la disgregazione tali sistemi devono essere contenuti da forze esterne (le pareti del contenitore possono essere schematizzate con forze esterne che agiscono sulle varie parti del sistema). Nel caso di gas perfetti (assenza di forze interne), l'energia interna sarà data unicamente dalla somma delle energie cinetiche delle particelle.

Per un bilancio energetico corretto dobbiamo quindi a questo punto scomodare il campo elettromagnetico. In questa sede ci limiteremo solo a dire che in presenza di campi elettrici variabili(41), l'energia meccanica non si conserva. Essa però non svanisce, la parte mancante infatti fluisce attraverso la superficie che delimita il sistema macroscopico, trasportata dalla radiazione elettromagnetica. Questo ci permette di considerare ancora valida la (11) (e quindi anche le conclusioni a cui siamo giunti) anche in presenza di forze interne non conservative, a patto di considerare l'energia totale come la somma di tutte la energie (compresa quella radiante).

Per i corpi macroscopici che si trovano a temperatura ambiente, la maggior parte della radiazione emessa si trova nelle frequenze dell'infrarosso. Nel caso di equilibrio con l'ambiente, la quantità di energia irraggiata è compensata da quella assorbita dall'esterno.

Per un corpo macroscopico che interagisce con l'ambiente esterno solo tramite interazioni di tipo meccanico (cioè tramite forze), il primo principio della *Termodinamica* ci dice che:

$$L' = -\Delta U \text{(42)}. \tag{12}$$

A prima vista una tale relazione risulta molto diversa dalla relazione (10) da noi trovata. Facciamo qualche considerazione per cercare di risolvere la questione:

- In genere i sistemi presi in considerazione in *Termodinamica* sono in quiete. Se il baricentro non varia la sua posizione, l'energia meccanica non può cambiare

(41) Campi elettrici variabili creano campi magnetici; questi però non fanno lavoro su cariche in movimento, perché la forza magnetica è sempre perpendicolare alla velocità della carica, e quindi al suo spostamento.

(42) Si tenga presente che in Termodinamica *l'Energia interna* è considerata una forma di energia, diversa da quella cinetica e potenziale. Questo perché essa si interessa solo dell'aspetto macroscopico e non va a guardare cosa succede a livello atomico. Ciò porta a far sì che i risultati della Termodinamica abbiano il non piccolo vantaggio di risultare indipendenti dal particolare modello microscopico usato per descrivere i corpi. Al contrario i risultati della fisica statistica (che riduce la termodinamica alla meccanica) sono fortemente dipendenti dal modello microscopico adottato (si pesi alla cosiddetta *catastrofe ultravioletta*, predetta a partire da un modello che non teneva conto degli effetti quantistici). All'inizio del '900 quando tutte le certezze sulle leggi fisiche applicate ai fenomeni microscopici stavano perdendo di significato, i fisici hanno trovato nella Termodinamica dei punti fermi a cui si son potuti ancorare con sicurezza.

e quindi $\Delta E_m = 0$. La (10) si riduce pertanto a $L_{NC} = \Delta U$[43].

- Il punto precedente ci dice che in genere il lavoro considerato in *Termodinamica*, è quello dovuto alle forze responsabili della variazione del volume del sistema (se varia il volume vuol dire che le varie parti della superficie del sistema subiscono uno spostamento – *lavoro di deformazione*).
- Il lavoro L' che viene preso in considerazione in *Termodinamica*, non è quello dell'ambiente sul sistema (che noi abbiamo indicato con L), ma quello del sistema sull'ambiente[44]. Dato che tali forze agiscono per contatto (lungo la superficie che delimita il sistema macroscopico) si ha, per quanto detto all'inizio del paragrafo 5.2 (pag. 28): $L' = -L$.

Con queste considerazioni è facile passare dalla (10) alla (12).

(43) Una variazione di volume comporta una variazione della posizione del baricentro e quindi una variazione di energia potenziale. Non possiamo quindi affermare in modo rigoroso che $\Delta E_m = 0$; pertanto la relazione $L_{NC} = \Delta E_m + \Delta U$ (10) diventa: $L_{NC} = \Delta E_P + \Delta U$. Per i liquidi e per i solidi le variazioni di volume sono minime, pertanto possiamo trascurare questo effetto. Per i gas però le variazioni di volume non possono considerarsi trascurabili. Consideriamo 1 m^3 di gas perfetto in un cilindro con area di base pari 1 m^2 (esageriamo). A temperatura 300 K e pressione 10^5 Pa il numero di moli è pari a $n = \frac{PV}{RT} \sim \frac{10^5}{8 \cdot 300}\text{mol} \sim 40\ \text{mol}$. Se la massa delle molecole del gas è intorno a 28 uma, allora la massa del gas è di circa $40\,\text{mol} \cdot 28\ \text{g/mol} \sim 1\,\text{kg}$. Immaginiamo che alla sommità del cilindro ci sia un pistone ad altezza h = 1 m dalla base e che venga abbassato di mezzo metro abbiamo: $\Delta E_P = -mg(h/4 - h/2) \sim -(1 \cdot 10 \cdot 1/4)\text{J} \sim -2{,}5\,\text{J}$ (si tenga presente che dobbiamo tener conto dell'altezza del baricentro). Dobbiamo confrontare questo valore con la variazione di energia interna. Per una variazione minima di 1 grado Kelvin abbiamo: $\Delta U \sim nR\Delta T \sim 40 \cdot 8 \cdot 1\ \text{J} = 320\,\text{J}$. Considerando ΔE_P, abbiamo una variazione percentuale rispetto al caso in cui ΔE_P viene trascurata, pari a $2{,}5/320 \sim 8\,‰$.

(44) Attenzione a non confondere le forze che producono questo lavoro con le forze interne. Le forze in questione infatti sono le forze che il sistema (visto come un tutt'uno) applica all'ambiente esterno, come reazione all'azione dell'ambiente sulle varie parti della superficie del sistema (principio di azione e reazione); le forze interne invece, sono applicate alle particelle che costituiscono il sistema.

Versioni

Tutti i rimandi (numeri di formula, capitoli, paragrafi, ecc.) si riferiscono al presente testo.

Versione 10.1.1

- aggiunta nota 7.

Versione 11.0.0

- Aggiunto paragrafo 5.2

Versione 11.1.0

- Eliminata ex-nota 32

Versione 11.2.0

- Aggiunta nota 35

Versione 11.2.1

- Variazioni minime.

Versione11.3.0

- Errata Corrige – paragrafo 1.1: eliminata la frase: "*stesso modulo*" nella definizione del I e del II Caso.
- Aggiunto il paragrafo 1.3.
- Piccola modifica alla nota 43 per renderla più chiara
- Aggiunta delle note 35 e 38.

Versioni 11.3.1 – 11.3.2

- Aggiornamento dell'indice
- Correzioni minori

Versioni 11.3.3 – 11.3.4

- Lievi modifiche al paragrafo 1.3
- Modificata nota 11.
- Correzioni minori

Versione 11.4.1

- Errata corrige: corretta la nota 2.
- Errata corrige: Nota 24 → sostituita la frase : "*L'energia potenziale è pari al lavoro* ***che deve fare la forza conservativa*** *quando il corpo si sposta dal punto in cui si trova al piano di riferimento*", con la frase: "*L'energia potenziale è pari al lavoro* ***che deve fare la forza conservativa*** *per spostare il corpo dal punto in cui si trova al piano di riferimento*".
- Errata corrige: Nota 43 → sostituito $40\,\mathrm{mol} \cdot 28\ \mathrm{kg/mol} \sim 1\,\mathrm{kg}$, con $40\,\mathrm{mol} \cdot 28\ \mathrm{g/mol} \sim 1\,\mathrm{kg}$ in nota.
- Aggiunta la nota 29.
- Integrata la nota 35 (pag.29) con aspetti più formali.
- Aggiunta nota 36, 37 e 39.
- Aggiunta un'introduzione a carattere intuitivo, al paragrafo: 5.1 (pag.27)
- Eliminata la nota Ex 27
- Correzioni minori.

Versione 11.5.0

- Aggiunta la nota 4 a pag. 5.
- Portato in nota 15 (pag. 17) l'esempio del pianeta.
- Integrazione della nota24 a pag.23
- Correzioni minori